

MÉTODOS NUMÉRICOS

Dr. Bruno Roccia & Dr. Luis Ceballos

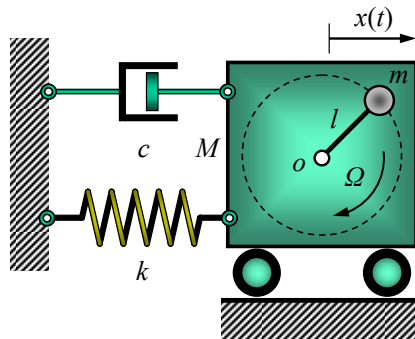
(2^{do} Semestre 2019)

Trabajo Práctico ODEs

Asignado: 19 de noviembre de 2019

Entregar: 02 de diciembre de 2019

Una partícula de masa m gira con una velocidad angular constante Ω alrededor de un eje fijo que se encuentra en el interior de un bloque de mayor tamaño cuya masa es M . El bloque de masa M está fijado a la pared mediante un resorte de rigidez k y un amortiguador de constante c , como se muestra en la figura,



La ecuación de movimiento que rige el comportamiento del sistema descrito anteriormente en términos de la coordenada generalizada $x(t)$ es:

$$(M + m)\ddot{x} + c\dot{x} + kx = l m \Omega^2 \sin(\Omega t),$$

El problema de valores iniciales está compuesto por la ODE anterior y las siguientes condiciones iniciales: $x(0) = 1.0$ y $\dot{x}(0) = 0.0$.

Se pide:

- 1.1. Caracterizar la ecuación de movimiento (orden de la ecuación diferencial, lineal o no lineal, a coeficientes constantes o variables, homogénea o no homogénea). Justificar.
- 1.2. Use las variables auxiliares $z_1 = x$ y $z_2 = \dot{x}$ para transformar esta ecuación diferencial de orden dos en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma $\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{z}(t))$. Muestre explícitamente la forma de $\mathbf{z}(t)$, $\dot{\mathbf{z}}(t)$, y $\mathbf{F}(t, \mathbf{z}(t))$.
- 1.3. Implemente el método de Euler clásico para integrar el problema de valores iniciales para $h = 0.001$, $h = 0.01$, $h = 0.1$ y $h = 1.0$. Comente sobre los resultados y compare con la solución exacta del problema de valores iniciales.
- 1.4. Implemente el método de Euler implícito para integrar el problema de valores iniciales para $h = 0.001$, $h = 0.01$, $h = 0.1$, $h = 1.0$, y $h = 1.5$. Comente sobre los resultados y compare con la solución exacta del problema de valores iniciales.

1.5. . Implemente el método de Runge-Kutta de cuarto orden para integrar el problema de valores iniciales para $h = 0.001$, $h = 0.01$, $h = 0.1$ y $h = 1.0$. Comente sobre los resultados y compare con la solución exacta del problema de valores iniciales.

1.6. Utilice los tres métodos numéricos para analizar el sistema cuando $\Omega = 3.5355339059327$. Explique el comportamiento del sistema dinámico. ¿Es coherente? Utilice un paso de tiempo adecuado.

1.7. Grafique el error de truncamiento global (calculado con respecto a la solución verdadera) como función del paso de tiempo empleado. ¿Cómo se comporta la precisión (Primer orden, segundo orden, etc) de cada método implementado? Justificar.

Datos: $L = 0.75$ m; $k = 25$ N/m; $c = 0.25$ Ns/m; $M = 1.5$ Kg; $m = 0.5$ Kg; Tiempo de simulación $TF = 30$ seg.

NOTA: La solución exacta de la ecuación de movimiento introducida anteriormente es:

$$X(t) = x_H(t) + x_p(t),$$

donde $x_H(t)$ es la solución homogénea de la ODE y $x_p(t)$ es la solución particular de la ODE. La solución homogénea está dada por,

$$\begin{aligned} x_H(t) &= e^{-\xi \omega_n t} \left(x(0) \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{x}(0) + \xi \omega_n x(0)}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right), \quad \text{si } 0 < \xi < 1, \\ x_H(t) &= x(0) e^{-\omega_n t} + (\dot{x}(0) + \omega_n x(0)) t e^{-\omega_n t}, \quad \text{si } \xi = 1, \text{ y} \\ x_H(t) &= x(0) \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\omega_d'} (\xi \omega_n \sinh(\omega_d' t) + \omega_d' \cosh(\omega_d' t)) + \dot{x}(0) \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\omega_d'} \sinh(\omega_d' t), \quad \text{si } \xi > 1. \end{aligned}$$

Donde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ y $\omega_d' = \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$.

La solución particular está dada por,

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t),$$

donde,

$$\begin{aligned} A &= \frac{L \Omega^3 m c}{(\Omega^2 (M + m) - k)^2 + \Omega^2}, \text{ y} \\ B &= \frac{(M \Omega^2 + m \Omega^2 - k) L \Omega^2 m}{(\Omega^2 (M + m) - k)^2 + \Omega^2}. \end{aligned}$$